Пусть A и B — нелинейные эволюционные операторы второй кратности. Построим композиции этих операторов: $Cx = B \circ A$, $Fx = A \circ B$.

Определение 2. Назовем оператор B левым асимптотическим обратным нелинейным оператором степени r к оператору A, если $C = I + \sum_{k_1+k_2 \geqslant r+1} C_{k_1,k_2}$, где I — тождественный оператор.

Определение 3. Назовем оператор B правым асимптотическим обратным нелинейным оператором степени r к оператору A, если $F = I + \sum_{k_1+k_2 \geqslant r+1} F_{k_1,k_2}$, где I — тождественный оператор.

Определение 4. Если оператор B будет левым и правым асимптотическим обратным оператором к A, то будем его называть нелинейным асимптотическим обратным оператором.

Например, асимптотический обратный оператор первой степени $B_1 y = b_{1,0} f_1 + b_{0,1} f_2$, так как $b_{1,0} * a_{1,0} = \delta$, следовательно, $b_{1,0} = (a^*_{1,0})^{-1}$. Получаем для первого приближения $x_1 = b_{1,0} * f_1 + b_{0,1} * f_2$. Нахождение компонент асимптотического обратного оператора заданной степени сводится к нахождению последовательных приближений решений системы.

О ПОВЕДЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ОДНОГО КУБИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

А.Ю. Хамраев

Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан
khamrayev@yandex.ru

В данной работе для одного вольтерровского кубического оператора на двумерном симплексе рассмотрено все неподвижные точки и польностью изучены траектории кубических операторов. Многочисленные задачи биологии решаются применением теории меры и теории динамических систем. Эти динамические системы определяются итерациями нелинейных операторов. Дадим определение таких операторов.

Пусть $E = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Рассмотрим множество

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : x_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

Множество S^{n-1} называется $(n-1)$-мерным симплексом. Каждый элемент $x \in S^{n-1}$ является вероятностной мерой на E и его можно интерпретировать как состояние биологической (физической, социологической и т. п.) системы, состоящей из n элементов.

Одна из основных задач для данной системы состоит в изучении эволюции состояния системы. Обычно потомки состояния системы определяются некоторыми законами. Для решений задач возникающих в математической генетике используется квадратичные операторы, теория которых в настоящей время хорошо развита (см. например [1, 2]). В работе [6] для одного вольтерровского кубического оператора на двумерном симплексе найдены все неподвижные точки. Дано описание предельного множества траектории для некоторых подклассов таких операторов.

В настоящей работе мы изучаем динамические системы, задаваемые кубическими операторами. Состояние популяции описывается набором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вероятности разновидностей. Следовательно, $x \in S^{n-1}$.

При случайном скрещивании

$$x'_l = \sum_{i,j,k=1}^{n} P_{ijk,l} x_i x_j x_k, \quad l = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

будет полной вероятностью разновидности для непосредственных потомков.

Пусть $W : S^{n-1} \to S^{n-1}$ отображение определяемое равенством (1). Оператор W назовем кубическим оператором.

Таким образом, если в некотором поколении популяция находиться в состоянии x, то в следующем поколении она находиться в состоянии $x' = Wx$.

Напомним, что если в скрешевании участвуют только два родителя i, j и рождается k, тогда поколение популяции определяется оператором V :

$$x'_k = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

где $P_{ij,k \geqslant 0}$, $\sum_{k=1}^{n} P_{ij,k} = 1$ и $P_{ij,k} = P_{ji,k}$ для любого i, j, k.

Оператор (2) называется квадратичным оператором.

Рассмотрим кубический оператор $W : S^2 \to S^2$ следующего вида:

$$\begin{aligned} x' &= x(x^2 + (2+3\varepsilon)xy + (1-3\varepsilon)y^2 + (1-3\varepsilon)z^2 + (2+3\varepsilon)xz + 2yz), \\ y' &= y(y^2 + (2+3\varepsilon)xy + (1-3\varepsilon)x^2 + (2+3\varepsilon)yz + (1-3\varepsilon)z^2 + 2xz), \\ z' &= z(z^2 + (2+3\varepsilon)yz + (1-3\varepsilon)y^2 + (1-3\varepsilon)x^2 + (2+3\varepsilon)xz + 2xy), \quad -\frac{2}{3} \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть $\lambda_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$ начальное распределение. Траектория точки λ_0 при действии оператора (3) определяется следующим образом: $\lambda_n = W_\varepsilon^{(n)}(\lambda_0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Теорема. *Для любой* $\lambda = (x, y, z) \in S^2$ *траектории оператора* (1), *имеем следующие пределы:*

$$a)\ \lim_{n\to\infty} W_\varepsilon^{(n)}(\lambda) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \lambda \in T, \\ (0, 1/2, 1/2), & \text{если } \lambda \in \{y = z > 1/3\}, \\ (1/2, 0, 1/2), & \text{если } \lambda \in \{x = z > 1/3\}, \\ (1/2, 1/2, 0), & \text{если } \lambda \in \{x = y > 1/3\}, \\ (1, 0, 0), & \text{если } \lambda \in \{x > y \geqslant z\} \bigcup \{x > z \geqslant y\}, \\ (0, 1, 0), & \text{если } \lambda \in \{y > x \geqslant z\} \bigcup \{y > z \geqslant x\}, \\ (0, 0, 1), & \text{если } \lambda \in \{z > x \geqslant y\} \bigcup \{z > y \geqslant x\}, \end{cases} \quad \varepsilon \in (0; 1/3];$$

$$б)\ \lim_{n\to\infty} W_\varepsilon^{(n)}(\lambda) = \begin{cases} (0, 1/2, 1/2), & \text{если } \lambda \in \{x \in S^2;\ x = 0\}, \\ (1/2, 0, 1/2), & \text{если } \lambda \in \{x \in S^2;\ y = 0\}, \\ (1/2, 1/2, 0), & \text{если } \lambda \in \{x \in S^2;\ z = 0\}, \\ C, & \text{если } \lambda \in \operatorname{int} S^2, \end{cases} \quad \varepsilon \in [-2/3, 0).$$

Литература

1. Ганиходжаев Р. Н. *Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турниры* // Матем. сб. 1992. Т. 183, № 8, С. 121–140.

2. Ganikhodzhaev R. N., Mukhamedov F. M. Rozikov U. A. *Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems.* Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. rel/fields. 2011. V. 14. № 2. P. 279–335.

3. Хамраев А. Ю. *Об одном кубическом операторе вольтеровского типа* // УзМЖ. 2009. № 3. С. 65–71.

4. Розиков У. А., Хамраев А. Ю. *О кубических операторах определенных на конечномерным симпелксах* // Укр. МЖ. 2004. Т. 56. № 10. С. 1418–1427.

5. Rozikov U. A., Khamrayev A. Yu. *On construction and a Class of Non-Volterra cubic stochastic operators* // Nonlinear dynamics and systems theory An International Journal of Research and Surveys. Ukraine 14. 2014. P. 9.

6. Хамраев А. Ю. *Поведение траекторий одного кубического оператора на двумерном симплексе* // Узбекский матем. ж. 2013. № 1. С. 130–137.